ANÁLISE ECONÓMICA • 49

XESÚS PEREIRA LÓPEZ
Universidade de Santiago de Compostela

MELCHOR FERNÁNDEZ FERNÁNDEZ
Universidade de Santiago de Compostela, IDEGA

ANDRÉ CARRASCAL INCERA
Universidade de Santiago de Compostela, IDEGA

ALGUNAS CONSIDERACIONES ACERCA DE LOS MODELOS INPUT-OUTPUT RECTANGULARES

Edita: Servicio de Publicacións da Universidade de Santiago de Compostela
ISSN: 1138-0713
D.L.G.: C-1842-2007

Algunas consideraciones acerca de los modelos input-output rectangulares*

André Carrascal Incera[2]
Melchor Fernández Fernández[3]
Xesús Pereira López[1]

RESUMEN

La explotación óptima de datos conocidos debe prevalecer en los estudios económicos. Aunque, en la modelización económica vinculada a las tablas *supply-use* se desatiende bastante este aspecto. De hecho, como en este formato el número de productos supera al número de industrias, se pierde mucha información al ejecutar agregaciones para conseguir matrices cuadradas. No obstante, las matrices rectangulares se pueden abordar directamente mediante el uso de inversas generalizadas.
El principal objetivo de este documento de trabajo es enfatizar que la elaboración de tablas simétricas input-output no es un trámite obligatorio, e incluso resulta innecesario. A pesar de ello, se recuerda el procedimiento a seguir para construir matrices simétricas mediante las hipótesis de tecnología de producto e industria. Por último, se plasma una aplicación práctica con vistas a resaltar las distintas alternativas que el proporciona análisis económico en este ámbito.

***Palabras clave*:** inversa Moore-Penrose; input-output; modelo rectangular; tablas supply-use.
***Clasificación JEL*:** C67, D57.

ABSTRACT

In economic studies, optimal use of known information should be paramount. But this requirement is usually neglected in economic modeling based on supply-use tables (SUTs). In SUT format the number of products is higher than the number of industries, and the usual practice is to aggregate products to obtain square matrices, with the subsequent loss of information. This should not be case, as rectangular matrices can be directly used for modeling by the methods of generalized inversion.
The aim of this working paper is to highlight that there is no need to elaborate symmetric input-output tables (SIOTs). After describing SIOT-building procedures using the product technology and the industry technology hypotheses, the paper presents an example that illustrates the different options available for economic analysis in the SUTs context.

Keywords: Moore-Penrose inverse, input-output, rectangular models, supply-use tables.
JEL Classification: C67, D57.

[1]Universidade de Santiago de Compostela, Instituto Universitario de Estudos e Desenvolvemento de Galicia (IDEGA) y Departamento de Economía Cuantitativa, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Avenida do Burgo s/n. 15782, Santiago de Compostela (Spain). Email: xesus.pereira@usc.es.Tlf. +34 8818 11708. Autor a efectos de correspondencia.

[2]Universidade de Santiago de Compostela, Instituto Universitario de Estudos e Desenvolvemento de Galicia (IDEGA), Avda. das Ciencias, Chalet nº 1, Campus Universitario Sur. 15782, Santiago de Compostela (Spain). Email: andre.carrascal@rai.usc.es.Tlf. +34 8818 14441.
[3]Universidade de Santiago de Compostela, Instituto Universitario de Estudos e Desenvolvemento de Galicia (IDEGA) y Departamento de Fundamentos del Análisis Económico, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Avenida do Burgo s/n. 15782, Santiago de Compostela (Spain). Email: melchor.fernandez@usc.es.Tlf. +34 8818 11551.

* Los autores agradecen la subvención de la Xunta de Galicia, a través del proyecto PGIDIT 10TUR242004PR. También hacen explícito su agradecimiento hacia los demás miembros del Grupo de Análisis y Modelización Económica (GAME) por los comentarios recibidos.

1.- Introducción

La metodología input-output ofrece varias posibilidades de análisis dado que es posible trabajar directamente con las tablas *supply-use* (SUTs[1]) o con la tabla simétrica (ST). En esta ocasión, la atención se centrará en el primer escenario. De tal forma que se desarrollarán varios modelos de demanda y oferta en el entorno de las SUTs.

Lo normal es que las matrices de consumos intermedios asociadas a las SUTs sean rectangulares. Por lo tanto, para despejar el vector de producción (por productos o por ramas de actividad) en la construcción de los modelos obtenidos directamente de las SUTs es necesario recurrir a "inversas" de matrices rectangulares. Con vistas a esquivar esta necesidad existe un simple procedimiento, por cierto bastante empleado, que consiste en realizar agregaciones por productos para obtener una matriz cuadrada. Pero, sin duda alguna, ello implica una pérdida significativa de información disponible en las SUTs. En la investigación económica quizás exista un cierto desvío de atención: las inversas son una herramienta de trabajo no un fin en sí mismas. Se verá como se puede evitar el mencionado problema utilizando inversas generalizadas en la construcción de modelos con la ventaja de que están perfectamente calibrados y por lo tanto son admitidos como herramienta de análisis. Recientemente, Pereira, Carrascal *et al.* (2011) presentaron un modelo de demanda en el entorno de SUTs gracias a la inversa de Moore-Penrose. En este documento de trabajo se pretende destacar su potencial, sobre todo a efectos prácticos.

Una de las características que debe predominar en el análisis económico es una óptima explotación de los datos disponibles. Por lo tanto, el desperdicio de información mediante meras agregaciones no es aconsejable. Tal como se verá, se pueden evitar las recurrentes agregaciones de productos a través del cálculo de inversas de matrices rectangulares. En concreto, se utilizará la inversa generalizada de Moore-Penrose (Moore, 1920; Penrose, 1955). Hay otras inversas generalizadas, como la de Drazin, pero la indicada es muy manejable dentro del marco input-output. Esta inversa generalizada se emplea mucho en otros campos, y en el ámbito de la economía también se utilizó en varios contextos. Consta, por lo menos, su uso en econometría en relación a matrices particionadas (Baksalary y Baksalary, 2007), en modelos de demanda dinámicos (Schinnar, 1978), en agregación de industrias (Olsen, 2000) o en matrices de contabilidad social (Luppino *et al.*, 2004). Zhao (2002) también la aplicó en el entorno de SUTs para evitar agregaciones en los modelos de demanda basados en la hipótesis de tecnología de producto.

[1] Se utilizará la abreviatura SUTs en relación a la expresión anglosajona Supply and Use Tables.

En relación al uso de toda la información disponible, sería interesante articular la modelización con la actualización global de SUTs. A estos efectos puede consultarse Pereira, Quiñoá *et al*. (2011). Esta combinación de técnicas daría lugar a mejores aproximaciones de realidades económicas representadas por medio de estos esquemas.

2.- Modelos input-output rectangulares

2.1.- Cuestiones preliminares

Existen distintas posibilidades de análisis input-output en función del carácter de las representaciones contables: rectangulares o simétricas. A su vez, existen modelos expresados en producción por productos y por ramas de actividad. En realidad, lo que se hace es construir ST, en un caso producto por producto y en otro sector por sector. Es decir, hay varias opciones de análisis a través de las SUTs. A estos efectos, véanse los manuales de la ONU y Eurostat (United Nations, 1999; Eurostat, 2008). En esta ocasión, se abordarán los modelos de flujos domésticos por el interés que éstos presentan en los estudios regionales, aunque los desarrollos matemáticos son análogos para los flujos totales.

Se entiende acertado recordar la definición del concepto de inversa generalizada de Moore-Penrose. A estos efectos, si se considera una matriz $A \in M_{m\times n}(R)$, se dice que A_x (matriz de orden $n\times m$) es la inversa generalizada de Moore-Penrose, si y solamente si, se verifican las siguientes propiedades:

$AA_xA = A$ (P.1), AA_x es simétrica (P.2), A_xA es simétrica (P.3) y $A_xAA_x = A_x$ (P.4); asimismo, siempre existe A_x y es única. También se cumple que

i. Si $m \geq n$ y $rg(A) = n \Rightarrow A_x = (A^TA)^{-1}A^T$ y además $A_xA = I_n$.
ii. Si $m \leq n$ y $rg(A) = n \Rightarrow A_x = A^T(AA^T)^{-1}$ y además $AA_x = I_m$.
iii. Si $rg(A) = r \leq min\{m, n\} \Rightarrow A_x = C_xB_x$, siendo B_x y C_x las inversas generalizadas de las matrices $B \in M_{m\times r}(R)$ y $C \in M_{r\times n}(R)$ de rango r tales que $A = BC$.

En lo sucesivo, i se corresponde con un vector columna con todas sus componentes igual a uno. El símbolo ^{T} denota la transposición y $^{-1}$ la inversión. Dado que estas operaciones conmutan entre sí, su composición se expresará de forma simplificada por $^{-T}$. La notación ^ indica la diagonalización del correspondiente vector, se entiende que los elementos que no pertenezcan a la diagonal principal son iguales a cero.

Se pueden definir dos relaciones contables entorno a la matriz de producción, V. Por un lado, la producción por productos se obtienen como suma por filas, $q=Vi$. Y por otro lado, la producción por ramas de actividad se corresponde como suma por columnas de dicha matriz, $g=V^Ti$.

A partir de las definiciones de coeficientes de técnicos (interiores) y distribución (interiores), es inmediato ver como las matrices que engloban dichos coeficientes, B^d y H^d, respectivamente, se expresan de la siguiente forma:

$$B^d = U^d\, \hat{g}^{-1} \qquad \text{y} \qquad H^d = \hat{q}^{-1} U^d.$$

A su vez, la matriz de coeficientes de mercado resulta del siguiente producto matricial;

$$D = \hat{q}^{-1}\, V,$$

después de ciertas sustituciones se obtiene que $g = D^T q$.

La matriz de coeficientes de especialización se construye como se indica a continuación:

$$C = V \hat{g}^{-1},$$

y a partir de aquí se sabe que $q = Cg$.

2.2.- Modelos supply-use: distintas alternativas

Para confeccionar modelos por productos a partir de las SUTs, es preciso recurrir a hipótesis simplificadoras que establecen dos tipos de relaciones entre las producciones por productos y por sectores. En un caso hay que apoyarse en la estabilidad de las estructuras por filas de la matriz de producción y en el otro caso se considera la estabilidad de las estructuras por columnas de la misma matriz. En resumen, hay dos opciones: modelos basados en un supuesto de tecnología de la rama de actividad, y modelos basados en un supuesto de tecnología del producto.

En la elaboración del modelo de tecnología de la industria se admite que la matriz de coeficientes de mercado, *D*, es estable temporalmente. Es decir, siempre se utiliza el supuesto de cuotas de mercado del producto constantes para las distintas ramas. Por lo tanto, se considera la identidad por producto:

$$q = U^d i + y^d,$$

en donde y^d es la demanda final doméstica por productos y U^d es la matriz de consumos intermedios interiores.

A continuación, es posible sustituir la demanda intermedia doméstica, $U^d i$, por $B^d g$, de acuerdo con la estabilidad de los coeficientes técnicos (interiores). Es decir, se tiene que

$$q = B^d g + y^d,$$

en donde B^d es la matriz de coeficientes técnicos interiores no homogéneos.

Ahora bien, basándose en la otra hipótesis de trabajo, se puede sustituir g por $D^T q$. En consecuencia,

$$q = B^d D^T q + y^d.$$

Con lo cual, es posible elaborar el modelo de demanda correspondiente a la producción por productos:

$$q = (I - B^d D^T)^{-1} y^d.$$

En los modelos de hipótesis de la tecnología de producto se considera la estabilidad de la matriz de coeficientes de especialización, *C*. Cada producto se produce con una tecnología específica, independientemente de la industria que lo produzca; en otras palabras, la estructura de consumos intermedios es la del producto. Cuando las matrices de consumos intermedios y producción son cuadradas y de rango completo también se pueden diseñar modelos alternativos[2]. De ser así, se puede calcular la inversa de *C*; es decir, la producción por ramas de actividad vendrá dada por $g=C^{-1}q$. Por lo tanto, se obtiene alternativamente otro modelo de demanda por productos:

$$q = (I - B^d C^{-1})^{-1} y^d.$$

Kop Jansen y ten Raa (1990) sostienen que, desde un punto de vista axiomático, la hipótesis de tecnología de producto es teóricamente superior a la otra. En este sentido, Steenge (1990) y Konijn (1994) indican que siempre es teóricamente posible encontrar una matriz de coeficientes técnicos no negativos que sea consistente con la información disponibles en las SUTs. Además, Mattey y ten Raa (1997), utilizando información a nivel de establecimientos sobre consumos y producciones, demuestran empíricamente que la hipótesis de tecnología de producto también puede ser útil. No obstante, ten Raa y Rueda-Cantuche (2005) indican que la aplicación de dicha hipótesis posee sus limitaciones. Por un lado, aparecen con mucha facilidad coeficientes técnicos negativos y en segundo lugar, afirman que es absolutamente necesario que el número de productos sea exactamente igual al número de ramas de actividad, aunque este último aspecto puede atajarse mediante el uso de inversas generalizadas. Recientemente, Rueda-Cantuche (2011) propone el uso de modelos econométricos. Estos problemas han sido tratados con intensidad en los últimos años, a este respecto pueden verse Armstrong (1975), Stahmer (1985), Young (1986), Rainer (1989), Steenge, (1990), Konijn (1994), Almon, (2000), o Guo *et al.* (2002).

Por lo tanto, es necesario resolver de manera preliminar si la tecnología es la de producto o la de industria, dado que muchos productos son elaborados por varias ramas y muchas ramas producen más de un producto. Existen dificultades teóricas para sostener la hipótesis de tecnología de rama, dado que significa un mismo coste de producción para diferentes productos vendidos a diferentes precios. En la práctica, esta hipótesis es la más usada debido a la supuesta imposibilidad de invertir la matriz de coeficientes de especialización. Con el paso del tiempo, la

[2] En general, estas matrices no son cuadradas, salvo que se recurra a agregaciones por filas. De acuerdo con la propia confección de las SUTs, los productos superan a las ramas de actividad.

utilización de modelos basados en esta tecnología también es problemática, ya que implica la estabilidad de las cuotas de mercado. Se admite que la estabilidad de los coeficientes de especialización varía en menor medida.

En todo caso, no siempre es necesario construir STs en el entorno de las SUTs, porque es factible obtener un modelo rectangular a través de la hipótesis de tecnología del producto, sin la obligación de recurrir a agregaciones. Se explica fácilmente, dado que se puede sustituir q por Cg en el sistema anterior, y entonces se tiene que

$$Cg = B^d g + y^d,$$

o, de modo alternativo:

$$(C - B^d)g = y^d.$$

Para despejar g se acude a la inversa de Moore-Penrose. En general, la matriz $(C-B^d)$ es rectangular y es asumible que su rango coincida con el número de columnas. Es más, en relación al modelo que se pretende construir se precisa que la matriz $(C-B^d)$ tenga un mayor número de filas que de columnas, de ser así, su inversa generalizada, $(C-B^d)_x$, es de orden $n \times m$ y además $(C-B^d)_x(C-B^d)=I_n$. De este modo, premultiplicando ambos miembros del anterior sistema por $(C-B^d)_x$ y, acto seguido, simplificando, se obtiene el modelo de flujos interiores relativo a la producción por ramas[3]:

$$g = (C - B^d)_x y^d.$$

3.- Modelo de oferta simplificado

Los modelos de oferta se presentaron como una variante natural de los modelos de demanda. Ésta alternativa fue propuesta por Ghosh (1958). No se trata de abordar aquí la plausibilidad del modelo de oferta, esta característica ha sido objeto de debate en muchas ocasiones (Bon, 1986; Oosterhaven, 1988, 1989, 1996; Miller, 1989; Rose y Allison, 1989; Dietzenbacher, 1997 o Guerra y Sancho, 2011). En este apartado sólo se expone el modelo de oferta en el entorno de las SUTs.

La siguiente relación contable es fundamental para la construcción de estos modelos:

$$(U^d)^T i + (U^m)^T i + v = g,$$

en donde U^m es la matriz de consumos intermedios importados y v el vector de inputs primarios. Con vistas a simplificar las fórmulas, se considera $t^m = (U^m)^T i$, que es el vector de inputs intermedios de flujos importados.

[3] Para mayor detalle, véase Pereira, Carrascal y Fernández (Pereira López, Carrascal, *et al.*, 2011).

A partir de aquí, teniendo en cuenta que $(U^d)^T i = (H^d)^T q$, lo que implica admitir la estabilidad de los coeficientes de distribución interiores (no homogéneos), se llega a

$$(H^d)^T q + t^m + v = g.$$

A continuación, asumiendo la estabilidad de la matriz D, se puede sustituir g por $D^T q$ en el anterior sistema:

$$(H^d)^T q + t^m + v = D^T q.$$

Después, se opera de tal forma que se pueda despejar la producción por productos, q. Por lo tanto, procede expresar el sistema como sigue:

$$(D^T - (H^d)^T)q = t^m + v.$$

Ahora se recurre a la inversa generalizada de Moore-Penrose, se trata de multiplicar por la izquierda los miembros de la anterior identidad por $(D^T - (H^d)^T)_x$. De tal forma que se obtiene

$$(D^T - (H^d)^T)_x(D^T - (H^d)^T)q = (D^T - (H^d)^T)_x(t^m + v).$$

Es necesario que las SUTs posean un número mayor o igual de columnas que de filas, para asegurarse que

$$(D^T - (H^d)^T)_x(D^T - (H^d)^T) = I_m,$$

De ser así, se obtiene el modelo de oferta correspondiente a la producción por productos:

$$q = (D^T - (H^d)^T)_x(t^m + v),$$

y, como es obvio, el modelo asociado será el siguiente:

$$g = D^T(D^T - (H^d)^T)_x(t^m + v).$$

Análogamente, se introduce el modelo simplificado de oferta por productos de flujos totales. En este caso la variable independiente es v (vector de inputs primarios). Así que si se considera la identidad

$$U^T i + v = g$$

y teniendo en cuenta la hipotética estabilidad de D y H, se puede sustituir g por $D^T q$ y el vector de los inputs intermedios por $H^T q$. De tal forma que se obtiene

$$H^T q + v = D^T q.$$

Ahora, con el objetivo de despejar la producción por productos, se va operando

$$(D^T - H^T)q = v,$$

después se multiplican por la izquierda ambos miembros de la anterior igualdad por la inversa generalizada de $(D^T - H^T)$ (se considera esta matriz de orden $m \times n$ –siendo $m < n$– y de rango completo) y inmediatamente se obtiene el modelo

$$q = (D^T - H^T)_x v.$$

En relación a los modelos de oferta, también es factible recurrir a la traspuesta. En este sentido, si se considera la igualdad entre inputs y producción (en su forma traspuesta),

$$iU + v^T = g^T,$$

y, acto seguido, se recurren a las sustituciones anteriores (adaptadas a este escenario), se ve como la identidad inicial se puede mostrar alternativamente:

$$q^T H + v^T = q^T D.$$

Después, con vistas a explicar la producción por productos se va operando;

$$q^T D - q^T H = v^T,$$

$$q^T (D - H) = v^T.$$

A partir de aquí, hay que multiplicar por la derecha ambos miembros de la igualdad por la inversa generalizada de $(D - H)$. Esta matriz tiene que ser de orden $m \times n$, o sea, se admite que el número de productos es estrictamente menor (o igual) al número de ramas, de ahí que

$$(D - H)(D - H)_x = I_m.$$

Entonces, el modelo de oferta resultante es el siguiente:

$$q^T = v^T (D - H)_x.$$

La matriz $(D - H)_x$ es la inversa generalizada de Ghosh y su elemento genérico representa el incremento en la producción del producto j ante un incremento de una unidad del valor añadido de la rama de actividad i.

4.- Transformación de tablas *supply-use* en tablas simétricas

Ahora se tratan las estimaciones de matrices cuadradas de inputs interiores, producto por producto o sector por sector, a partir de la matriz de consumos interiores, U^d, desde las dos ópticas posibles. Además, se obtiene la misma estimación, de ahí que exista una complementariedad entre modelos de demanda y oferta. En realidad, se presentan las matrices de consumos intermedios que forman parte de las STs asociadas a las hipótesis de tecnología.

Si por alguna razón se pretenden estimar las matrices de coeficientes técnicos (o de distribución) asociadas a los modelos construidos a partir de las SUTs el cómputo también sería inmediato. En distintos trabajos se explica la forma de obtener estas matrices de coeficientes técnicos desde la óptica de la demanda; como en Raa y Rueda-Cantuche (2005), pero cuando recurren a la hipótesis de tecnología de producto trabajan con esquemas cuadrados por lo que se pierde información disponible en las SUTs, tal como se apuntó anteriormente. Por los motivos indicados, cuando se acude a la hipótesis de tecnología de producto no se pueden construir modelos de demanda y oferta al mismo tiempo si no coincide el número de productos con el número de ramas de actividad, de ahí que más adelante se particularice considerando el mismo número de filas que de columnas, $m = n$.

Para obtener una matriz cuadrada producto por producto de consumos intermedios interiores basándose en la hipótesis de tecnología de industria, $W^d(i)$, existen dos alternativas que conducen a la misma solución: vía demanda o vía oferta. Los modelos de referencia son los siguientes:

$$q = (I - B^d D^T)^{-1} y^d \qquad \text{y} \qquad q = (I - C(H^d)^T)^{-1} C(t^m + v).$$

A continuación, se comprueba fácilmente como se cumple la siguiente igualdad

$$B^d D^T \hat{q} = (C(H^d)^T \hat{q})^T.$$

Por un lado, se tiene que

$$B^d D^T \hat{q} = U^d \hat{g}^{-1} V^T \hat{q}^{-1} \hat{q}$$

y simplificando se obtiene

$$W^d(i) = U^d \hat{g}^{-1} V^T = U^d C^T.$$

Por otro lado, atendiendo a la propiedad relativa a la trasposición de un producto de matrices se tiene que

$$(C(H^d)^T \hat{q})^T = \hat{q} H^d C^T$$

y, al mismo tiempo, se ve como

$$\hat{q} H^d C^T = \hat{q}\, \hat{q}^{-1} U^d (V \hat{g}^{-1})^T.$$

Por último, simplificando y operando se obtiene $W^d(i)$ desde esta óptica

$$W^d(i) = U^d \hat{g}^{-1} V^T = U^d C^T.$$

En relación a la estimación de una matriz cuadrada de inputs intermedios interiores por ramas de actividad de acuerdo con el supuesto mencionado, $\omega^d(i)$, sucede algo análogo a lo expuesto. También se puede enfocar desde las dos perspectivas indicadas. Los modelos de referencia son los siguientes:

$$g = (I - D^T B^d)^{-1} D^T y^d \qquad \text{y} \qquad g = (I - (H^d)^T C)^{-1} (t^m + v).$$

En efecto, también se verá como se cumple la siguiente igualdad relativa a matrices de consumos intermedios interiores:

$$\omega^d(i) = D^T B^d \hat{g} = ((H^d)^T C \hat{g})^T.$$

Con el fin de comprobarla, se modifica el primer miembro apoyándose en los coeficientes correspondientes a las SUTs. En concreto queda

$$D^T B^d \hat{g} = V^T \hat{q}^{-1} U^d \hat{g}^{-1} \hat{g} = V^T \hat{q}^{-1} U^d,$$

pero como $V^{T}\,\hat{q}^{-1}$ se corresponde con D^{T}, ya se obtiene por la vía de la demanda que

$$\omega^{d}(i) = D^{T}U^{d}.$$

A su vez, se tiene que

$$\hat{g}\,C^{T}H^{d} = \hat{g}\;(V\hat{g}^{-1})^{T}\,\hat{q}^{-1}U^{d}$$

y operando queda

$$\hat{g}\;(V\hat{g}^{-1})^{T}\,\hat{q}^{-1}\,U^{d} = \hat{g}\;\hat{g}^{-1}V^{T}\,\hat{q}^{-1}U^{d}.$$

Ahora bien, simplificando

$$\hat{g}\;\hat{g}^{-1}V^{T}\,\hat{q}^{-1}U^{d} = V^{T}\,\hat{q}^{-1}U^{d},$$

o sea, que según se preveía, desde la perspectiva de la oferta se llega a la misma estimación. En consecuencia,

$$V^{T}\,\hat{q}^{-1}U^{d} = D^{T}U^{d}.$$

En realidad, la estimación $\omega^{d}(i)$ se corresponde con el producto de la traspuesta de los coeficientes de mercado por la matriz de consumos intermedios interiores.

Basándose en la hipótesis de la tecnología del producto y en un contexto en dónde se disponga de un mismo número de productos que sectores, también se ve como se complementan los correspondientes modelos de demanda y oferta. Respectivamente son los siguientes:

$$q = (I - B^{d}C^{-1})^{-1}y^{d} \qquad \text{y} \qquad q = (I - D^{-T}(H^{d})^{T})^{-1}\,D^{-T}(t^{m} + v).$$

Así se ve, por un lado, como sería la matriz de consumos intermedios producto por producto, $W^{d}(o)$, en relación al modelo de demanda:

$$W^{d}(o) = B^{d}C^{-1}\,\hat{q} = U^{d}\,\hat{g}^{-1}(V\hat{g}^{-1})^{-1}\,\hat{q},$$

Atendiendo a la propiedad de la inversa de un producto se tiene que

$$(V\hat{g}^{-1})^{-1} = \hat{g}\,V^{-1},$$

de ahí que sustituyendo quede

$$U^{d}\,\hat{g}^{-1}(V\hat{g}^{-1})^{-1}\,\hat{q} = U^{d}\,\hat{g}^{-1}\,\hat{g}\,V^{-1}\,\hat{q}$$

y ahora simplificando se obtiene que

$$U^{d}\,\hat{g}^{-1}\,\hat{g}\,V^{-1}\,\hat{q} = U^{d}(\hat{q}^{-1}V)^{-1} = U^{d}D^{-1}.$$

Por lo tanto,

$$W^{d}(o) = B^{d}C^{-1}\,\hat{q} = U^{d}D^{-1}.$$

En relación a este modelo, la matriz de coeficientes técnicos interiores asociada, $A_{o}(U^{d}, V)$, se obtendría de forma inmediata. En efecto,

$$A_{o}(U^{d}, V) = B^{d}C^{-1} = U^{d}\,\hat{g}^{-1}(V\hat{g}^{-1})^{-1} = U^{d}\,\hat{g}^{-1}\,\hat{g}\,V^{-1} = U^{d}V^{-1}.$$

Este resultado aparece en distintas publicaciones, aunque para flujos totales. Véase, por ejemplo, Viet (1994), Almon (2000) o ten Raa y Rueda-Cantuche (2005).

Por otro lado se ve que la matriz de consumos intermedios relativa al modelo de oferta

$$(D^{-T}(H^d)^T \hat{q})^T = ((D^{-1})^T (H^d)^T \hat{q})^T = \hat{q} H^d D^{-1} = \hat{q}\, \hat{q}^{-1} U^d D^{-1} = U^d D^{-1}.$$

De ahí, que se pueda expresar como sigue:

$$W^d(o) = U^d D^{-1}.$$

Las restantes posibilidades son los modelos de demanda y oferta relativos a la producción de sectores basados en la hipótesis de tecnología de producto. En principio se escoge el caso $m = n$. El caso general, $m>n$, se tratará posteriormente. La expresión de estos modelos es la siguiente:

$$g = (I - C^{-1} B^d)^{-1} C^{-1} y^d \quad \text{y} \quad g = (I - (H^d)^T D^{-T})^{-1}(t^m + v).$$

Se pone de manifiesto su complementariedad a través de estimación de la matriz de consumos intermedios sector por sector, $\omega^d(o)$, de acuerdo con este supuesto. Si se acude al modelo de demanda ahora indicado, la matriz surge del siguiente producto matricial:

$$C^{-1} B^d \hat{g}.$$

A partir de aquí, se sustituye B^d y mediante una mera simplificación se obtiene que

$$C^{-1} B^d \hat{g} = C^{-1} U^d \hat{g}^{-1} \hat{g} = C^{-1} U^d.$$

A través del modelo de oferta, la matriz $\omega^d(o)$ resulta de la traspuesta de un producto matricial. En concreto,

$$((H^d)^T D^{-T} \hat{g})^T,$$

que también se puede expresar alternativamente mediante

$$\hat{g} D^{-1} H^d.$$

Teniendo en cuenta que

$$D^{-1} = (\hat{q}^{-1} V)^{-1} = V^{-1} \hat{q}$$

y al mismo tiempo si se sustituye H^d por $\hat{q}^{-1} U^d$ queda

$$\hat{g} D^{-1} H^d = \hat{g} V^{-1} \hat{q}\, \hat{q}^{-1} U^d = \hat{g} V^{-1} U^d,$$

pero como $C = V \hat{g}^{-1}$ entonces se tiene que

$$C^{-1} = (V \hat{g}^{-1})^{-1} = \hat{g} V^{-1},$$

de tal forma que

$$\hat{g} V^{-1} U^d = C^{-1} U^d,$$

se tiene que la matriz de consumos inputs intermedios se estima mediante un producto matricial. Analíticamente se expresa

$$\omega^d(o) = C^{-1} U^d.$$

A modo de síntesis, se presenta la siguiente tabla en la que aparecen las distintas alternativas estudiadas anteriormente para estimar la matriz de consumos intermedios interiores:

Tabla 1. Estimaciones de la matriz de consumos intermedios (interiores)

	hipótesis de tecnología de producto ($m=n$)	hipótesis de tecnología de industria ($m>n$)
producto × producto	$W^d(o) = U^d D^{-1}$	$W^d(i) = U^d C^T$
industria × industria	$\omega^d(o) = C^{-1} U^d$	$\omega^d(i) = D^T U^d$

Fuente: Elaboración propia

En definitiva, para obtener matrices de consumos intermedios interiores cuadradas por productos hay que multiplicar la matriz de consumos intermedios de flujos interiores, U^d, por la derecha por C^T o por D^{-1} (por una matriz o por otra en función de la hipótesis asumida). Para obtener matrices de consumos intermedios cuadradas por ramas de actividad hay que multiplicar U^d por la izquierda por D^T o C^{-1} (una vez más, según la hipótesis considerada). Por supuesto que, la multiplicación apropiada por las inversas generalizadas de D y C solamente tienen sentido en determinados contextos.

6.- Extensiones de los modelos *supply-use*

La posibilidad de actuación es mayor que lo que se ha visto hasta el momento. En principio se apuntó que no es obligatorio agregar SUTs por filas, como así se hace en muchas ocasiones. Se sabe que habitualmente $m > n$ y ello implica que a veces no es preciso construir STs, esa tarea pierde interés y la atención debe recaer en otros aspectos. Quizás sea más importante centrarse en la estimación de matrices de coeficientes y en las pseudo-inversas (o cuando corresponda inversas) asociadas. A efectos prácticos, una vez escogido el modelo más adecuado sólo se necesita multiplicar la matriz por el vector que actúa como variable independiente.

En un escenario de este tipo procede elaborar el siguiente modelo de demanda por productos mediante la tecnología de producto:

$$q = (I - B^d C_x)^{-1} y^d.$$

La matriz de coeficientes técnicos interiores asociada a este modelo, $A_o(U^d, V)$, se expresa mediante $B^d C_x$. Ahora bien, si se sustituyen B^d y C_x se tiene que

$$A_o(U^d, V) = B^d C_x = U^d \hat{g}^{-1} (V \hat{g}^{-1})_x.$$

En general, $(AB)_x \neq B_x A_x$, pero en este caso

$$(V \hat{g}^{-1})_x = \hat{g}\, V_x.$$

Por lo tanto, para que $\hat{g}$ V_x sea la inversa generalizada de Moore-Penrose de $V\hat{g}^{-1}$ se tienen que cumplir las cuatro propiedades relativas a esta noción. Hay que tener presente que $V \in M_{m\times n}$, admitiendo al mismo tiempo que V es de rango completo. Es decir, si $rg(V) = n$ entonces existe $V_x \in M_{n\times m}$ y además $V_xV = I_n$. En estas condiciones, la matriz VV_x es simétrica. Se demuestra fácilmente como se cumplen las cuatro propiedades de la noción de inversa generalizada para la matriz $V\hat{g}^{-1}$:

$$V\hat{g}^{-1}\hat{g}\,V_xV\hat{g}^{-1} = VI_nI_n\hat{g}^{-1} = V\hat{g}^{-1}. \tag{P.1}$$

$$V\hat{g}^{-1}\hat{g}\,V_x = VV_x, \text{ que es simétrica.} \tag{P.2}$$

$$\hat{g}\,V_xV\hat{g}^{-1} = \hat{g}\,V_xV\hat{g}^{-1} = \hat{g}\,I_n\hat{g}^{-1} = \hat{g}\ \hat{g}^{-1} = I_n \text{ (simétrica).} \tag{P.3}$$

$$\hat{g}\,V_xV\hat{g}^{-1}\hat{g}\,V_x = \hat{g}\,V_xVV_x = \hat{g}\,I_nV_x = \hat{g}\,V_x. \tag{P.4}$$

Volviendo de nuevo a la matriz de coeficientes técnicos asociada:

$$A_o(U^d, V) = B^dC_x = U^d\hat{g}^{-1}(V\hat{g}^{-1})_x = U^d\hat{g}^{-1}\hat{g}\ V_x = U^dI_nV_x = U^dV_x.$$

Al asumir la hipótesis del producto aparecen, o pueden aparecer, valores negativos en $A_o(U^d, V)$. En todo caso, estos valores deberían ser prácticamente nulos.

A continuación, se busca la matriz de consumos intermedios interiores basada en esta hipótesis de tecnología de producto. Eso sí, ahora la matriz es cuadrada de orden m. En concreto,

$$B^dC_x\hat{q} = U^dV_x\hat{q}.$$

Se aclara, dado puede llevar a confusión, que

$$B^dC_x\hat{q} \neq U^dD_x.$$

Hay que ter en cuenta que

$$D_x = (\hat{q}^{-1}V)_x \neq V_x\hat{q},$$

ya que si se pretende comprobar que $V_x\hat{q}$ es la pseudo-inversa de $\hat{q}^{-1}V$ se observa que no se verifica la segunda propiedad. Por lo tanto, en general $\hat{q}^{-1}VV_x\hat{q}$ no es una matriz simétrica.

Ya por último, se acude a escenarios en donde $m < n$. En esas circunstancias, sí tiene sentido construir el modelo de oferta por ramas de actividad:

$$g = (I - (H^d)^TD_x{}^T)^{-1}(t^m + v).$$

De una forma análoga, se puede resaltar como se obtiene la matriz de coeficientes de distribución asociada a este modelo $((H^d)^T D_x{}^T)^T$, o si se desea D_xH^d. En función de las definiciones de coeficientes de mercado y distribución interiores se sabe que

$$D_xH^d = (\hat{q}^{-1}V)_x\hat{q}^{-1}H^d$$

y en este caso también se tiene que $V_x\ \hat{q}^{-1}$ es la inversa generalizada de $\hat{q}^{-1}$ V.

Si $V \in M_{m\times n}$, siendo $m < n$ y admitiendo que V es de rango completo, entonces $rg(V) = n$ y, por lo tanto, existe $V_x \in M_{n\times m}$. Además V_xV es una matriz simétrica y VV_x se corresponde con la matriz identidad. A continuación, se comprueban las propiedades de la inversa de Moore-Penrose para esta matriz. En efecto,

$$\hat{q}^{-1} V V_x \hat{q}\, \hat{q}^{-1} V = \hat{q}^{-1} I_m I_m V = \hat{q}^{-1} V. \tag{P.1}$$

$$\hat{q}^{-1} V V_x \hat{q} = \hat{q}^{-1} I_m \hat{q} = \hat{q}^{-1} \hat{q} = I_m \text{ (simétrica)}. \tag{P.2}$$

$$V_x \hat{q}\, \hat{q}^{-1} V = V_x I_m V = V_x V, \text{ que es simétrica}. \tag{P.3}$$

$$V_x \hat{q}\, \hat{q}^{-1} V V_x \hat{q} = V_x I_m I_m \hat{q} = V_x \hat{q}\,. \tag{P.4}$$

Una vez demostrada esta igualdad se puede ver como

$$D_x H^d = V_x \hat{q}\, \hat{q}^{-1} H^d = V_x H^d.$$

Entonces, la estimación de la matriz de consumos intermedios interiores (por sectores) basándose en esta hipótesis es una matriz cuadrada de orden n:

$$\hat{g}\, D_x H^d = \hat{g}\, V_x H^d.$$

$\hat{g}\, V_x H^d \neq C_x H^d$, dado que si $m < n$, $C_x = (V \hat{g}^{-1})_x$ no se corresponde con $\hat{g}\, V_x$. Se demuestra fácilmente ya que $\hat{g}\, V_x V \hat{g}$ no es una matriz simétrica porque no se verifica la tercera propiedad del concepto en cuestión.

Por último, se destaca la interrelación entre $(C - B^d)$ y $(D - H^d)$, matrices que emergen en los procesos de confección de los modelos simples. En primer lugar, se analiza la interdependencia entre $(C - B^d)$ y $(D - H^d)$ (o alternativamente $(D^T - (H^d)^T)$, pues así aparecía en el modelo de oferta simplificado).

Así, anteriormente se indicó que

$$C = \hat{q}\, D\, \hat{g}^{-1} \qquad \text{y} \qquad B^d = \hat{q}\, H^d\, \hat{g}^{-1}.$$

Por lo tanto, si se considera $(C - B^d)$ y se realizan las sustituciones pertinentes se tiene que

$$(C - B^d) = (\hat{q}\, D\, \hat{g}^{-1} - \hat{q}\, H^d\, \hat{g}^{-1}),$$

a partir de aquí

$$(\hat{q}\, D\, \hat{g}^{-1} - \hat{q}\, H^d\, \hat{g}^{-1}) = \hat{q}\,(D\, \hat{g}^{-1} - H^d\, \hat{g}^{-1}) = \hat{q}\,(D - H^d)\, \hat{g}^{-1}.$$

En definitiva,

$$(C - B^d) = \hat{q}\; (D - H^d)\, \hat{g}^{-1},$$

o si se prefiere, se puede expresar la dependencia de acuerdo con

$$(D - H^d) = \hat{q}^{-1}(C - B^d)\, \hat{g}.$$

Atendiendo a una de las propiedades de la trasposición se obtiene que

$$(D^T - (H^d)^T) = (D - H^d)^T$$

y ahora se realizan sustituciones

$$(D - H^d)^T = (\hat{q}^{-1}(C - B^d)\,\hat{g})^T = \hat{g}\,(C - B^d)^T\,\hat{q}^{-1}.$$

A continuación, se analiza la relación entre $(C - B^d)^{-1}$ y $(D - H^d)^{-1}$. Es evidente que estas matrices aparecen cuando existe el mismo número de productos que de ramas de actividad y, al mismo tiempo, cuando las matrices $(C - B^d)$ y $(D - H^d)$ son de rango completo; dicho de otro modo, cuando $rg(C - B^d) = rg(D - H^d) = n$.

Por una parte, se considera $(C - B^d)^{-1}$ y teniendo en cuenta una de las igualdades anteriores se realiza la sustitución correspondiente para resaltar la dependencia entre las matrices mencionadas:

$$(C - B^d)^{-1} = [\hat{q}\,(D - H^d)\,\hat{g}^{-1}]^{-1}.$$

Basándose en la propiedad relativa a la inversa de un producto de matrices se tiene que

$$(C - B^d)^{-1} = \hat{g}\,(D - H^d)^{-1}\,\hat{q}^{-1}.$$

Por otra parte, se puede expresar $(D - H^d)^{-1}$ de la siguiente manera:

$$(D - H^d)^{-1} = \hat{g}^{-1}(C - B^d)^{-1}\,\hat{q}.$$

Ahora se comprueba la relación entre $(D^T - (H^d)^T)^{-1}$ y $(C - B^d)^{-1}$. En este sentido, se considera

$$(D^T - (H^d)^T)^{-1} = [(D - H^d)^T]^{-1} = [(D - H^d)^{-1}]^T,$$

sólo resta sustituir $(D - H^d)^{-1}$ y apoyarse en la propiedad de la traspuesta de un producto matricial

$$[(D - H^d)^{-1}]^T = [\,\hat{g}^{-1}\,(C - B^d)^{-1}\,\hat{q}\,]^T = \hat{q}\,[(C - B^d)^{-1}]^T\,\hat{g}^{-1}.$$

En definitiva, se obtiene que

$$(D^T - (H^d)^T)^{-1} = \hat{q}\,(C - B^d)^{-T}\,\hat{g}^{-1}.$$

Lo que pone de manifiesto que las inversas asociadas a los modelos simples de demanda y (con la particularidad de que $m = n$) son dependientes y fáciles de calcular una a partir de la otra.

Cuando en las SUTs se dispone de un número de productos mayor (o menor) que el número de sectores se puede recurrir de forma respectiva a los modelos en donde aparecen las pseudo-inversas $(C - B^d)_x$ y $(D^T - (H^d)^T)_x$. Anteriormente se indicó como estos modelos se elaboran en contextos diferentes, por lo que no hay motivo para buscar la dependencia entre estas matrices. Si $m > n$, el modelo de simple de demanda sería

$$g = (C - B^d)_x\, y^d$$

pero acudiendo al modelo simple de oferta no se puede despejar la producción por productos. Véase que

$$(D^T - (H^d)^T)_x(D^T - (H^d)^T)q = (D^T - (H^d)^T)_x(t^m + v),$$

pero la matriz $(D^T - (H^d)^T)_x(D^T - (H^d)^T)$ es simétrica aunque no tiene porque corresponderse con I_m. Dicho de otra forma, en general

$$(D^T - (H^d)^T)_x(D^T - (H^d)^T)q \neq q.$$

La distancia entre estos vectores indica que esa hipotética dependencia no se cumple siempre. Es más, si se pretende demostrar su supuesta relación, se tiene que

$$(C - B^d)_x = [\hat{q}\,(D - H^d)\ \hat{g}^{-1}]_x,$$

pero, en general, $(AB)_x \neq B_x A_x$. Así que, ajustándose al caso, se ve como

$$[\hat{q}\,(D - H^d)\ \hat{g}^{-1}]_x \neq \hat{g}\ (D - H^d)_x \hat{q}^{-1}.$$

Es decir, se comprueba que $\hat{g}\,(D{-}H^d)_x \hat{q}^{-1}$ no es la pseudo-inversa de $\hat{q}\,(D{-}H^d)\,\hat{g}^{-1}$.

7.- Aplicación práctica

En este apartado se acude a las SUTs de Euskadi del año 2009 para resaltar la utilidad de algunos aspectos metodológicos abordados en este artículo. El Eustat, instituto oficial de estadística de Euskadi, ofrece las SUTs valorados a precios básicos con una desagregación de 6×4. Esta dimensión es muy manejable y sirve perfectamente para destacar las principales peculiaridades del formato rectangular.

Por lo tanto, se consideran dichas tablas de forma conjunta y se calcula la pseudoinversa de Leontief (interior):

$$(C\text{-}B^d)_x = \begin{bmatrix} 1,578 & 0,009 & 0,003 & -0,052 & 0,019 & 0,054 \\ -0,335 & 1,350 & 0,359 & 0,123 & 0,048 & 0,133 \\ 0,018 & 0,008 & 1,383 & 0,074 & 0,027 & 0,125 \\ 0,181 & 0,135 & 0,207 & 1,469 & 1,225 & 1,162 \end{bmatrix}$$

En general, esta matriz tiene unas características específicas. A diferencia de lo que sucede en el entorno de la tabla simétrica –en donde los elementos de la inversa de Leontief son positivos–, en este caso concreto pueden emergen cifras negativas. En este esquema, un mismo producto puede ser producido por distintas ramas. Al fijarse en las alteraciones de la producción, de un determinado sector, motivadas por modificaciones en la demanda final de productos, es muy probable que surjan ciertas substituciones a la hora de elaborar dicho producto, es decir, que puede existir una mayor dependencia de la producción de otro sector, en vez del considerado. Probablemente, por esa razón aparezcan los valores negativos. La hipótesis de trabajo es la de tecnología de producto, y se sabe que los modelos asentados en la mencionada hipótesis cumplen los cuatro axiomas deseables, pero es muy habitual que aparezcan cifras negativas el matriz de coeficientes asociada, aunque comúnmente toman valores muy pequeños. La fuerte agregación sectorial de una economía, como es este caso, también puede provocar una distorsión en los resultados, lo cual se debe interpretar con la debida cautela.

Ahora se comprueba que el modelo simplificado de demanda (interior) está calibrado. O sea que el producto matricial de la anterior pseudoinversa de Leontief por la demanda final es igual a la producción por ramas de actividad (no homogéneas).

$$\begin{bmatrix} 1{,}58 & 0{,}01 & 0{,}00 & -0{,}05 & 0{,}02 & 0{,}05 \\ -0{,}33 & 1{,}35 & 0{,}36 & 0{,}12 & 0{,}05 & 0{,}13 \\ 0{,}02 & 0{,}01 & 1{,}38 & 0{,}07 & 0{,}03 & 0{,}13 \\ 0{,}18 & 0{,}14 & 0{,}21 & 1{,}47 & 1{,}22 & 1{,}16 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 246.210 \\ 29.585.356 \\ 9.211.660 \\ 17.427.106 \\ 13.626.569 \\ 14.841.317 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 825.794 \\ 47.954.063 \\ 16.502.791 \\ 65.492.586 \end{bmatrix}$$

No se trata de reproducir las distintas matrices simétricas estudiadas anteriormente. Sus cálculos no revisten mayor problema, como es obvio, siempre y cuando se acuda al modelo adecuado. A modo de ejemplo, se construyen las matrices de consumos intermedios mediante la hipótesis de tecnología de industria.

En este sentido, se considera la matriz de consumos intermedios interiores de Euskadi y se resaltan sus totales por filas y columnas:

U^d =

35.156	223.142	15.779	53.611	327.688
130.936	11.074.282	3.103.681	3.460.344	17.769.243
4.538	256.421	4.394.846	2.782.832	7.438.637
51.406	2.027.592	725.106	5.872.484	8.676.588
26.294	2.517.422	872.464	7.206.853	10.623.033
5.332	80.336	48.995	867.164	1.001.827
253.662	16.179.195	9.160.871	20.243.288	

En primer lugar, se indica la matriz producto por producto:

	23.710	229.262	16.559	23.516	21.619	13.023	327.688
	89.243	10.859.499	3.128.578	1.483.392	1.369.892	838.638	17.769.243
	3.778	265.142	4.372.882	1.096.083	1.027.895	672.856	7.438.637
$W^d(i)$ =	36.179	2.022.748	734.736	2.312.570	2.150.170	1.420.184	8.676.588
	19.603	2.498.847	884.467	2.838.345	2.638.905	1.742.866	10.623.033
	3.818	84.311	49.983	338.813	315.229	209.672	1.001.827
	176.332	15.959.809	9.187.205	8.092.720	7.523.711	4.897.240	

En segundo lugar, se muestra la matriz industria por industria:

	34.835	279.023	32.987	71.906	418.751
	130.976	11.029.784	3.141.782	3.705.519	18.008.061
$\omega^d(i)$=	4.608	261.903	4.333.326	2.768.426	7.368.263
	83.244	4.608.486	1.652.775	13.697.437	20.041.942
	253.662	16.179.195	9.160.871	20.243.288	

Con este supuesto de trabajo no aparecen cifran negativas, ni es necesario recurrir a inversas o pseudoinversas. Los cálculos son más elementales que en la otra hipótesis, aquí simplemente se acude a un sumatorio de productos de números positivos.

8.- Conclusiones

En general, las SUTs poseen un mayor número de productos que industrias, es decir, las SUTs son esquemas rectangulares. Aunque este formato dificulta la modelización económica, no es necesario realizar agregaciones para conseguir matrices cuadradas. Las matrices rectangulares se pueden abordar mediante el uso de inversas generalizadas de tal forma que se obtienen modelos de demanda y oferta alternativos a los asociados a tablas simétricas, producto por producto o industria por industria. En este documento de trabajo también se ha resaltado la construcción de modelos rectangulares de forma simplificada, que están calibrados.

Se explicó la construcción de matrices simétricas (interiores) mediante las hipótesis de tecnología de producto e industria. Así, para obtener matrices de consumos intermedios interiores cuadradas por productos hay que postmultiplicar U^d por C^T o por D^{-1}, en función de la hipótesis asumida. A su vez, para elaborar matrices de consumos intermedios cuadradas por industrias hay que premultiplicar U^d por D^T o por C^{-1}. No obstante, se ha enfatizado que la elaboración de tablas simétricas no es un trámite obligatorio.

En definitiva, no es preciso elaborar matrices cuadradas para poder invertirlas, es mejor explotar al máximo la información disponible en las SUTs. Se entiende que en la investigación económica se ha dado un cierto desvío de atención: las inversas son un mero instrumento de trabajo no un fin en sí mismas.

Referencias bibliográficas

Almon, C. (2000): "Product-to-Product Tables via Product-Technology with no Negative Flows". *Economics Systems Research*. Vol. 12, núm. 1, pp. 27–43.

Armstrong, A. (1975): "Technology Assumptions in the Construction of United Kingdom Input-Output Tables" in Allen, R.; Gossling, W. F. [ed.]: *Estimating and Updating Input-Output Coefficients*. Input-Output Publishing Co. London.

Baksalary, J.; Baksalary, O.M. (2007): "Particular Formulae for the Moore-Penrose Inverse of a Column Wise Partitioned Matrix". *Linear Algebra and its Applications*. Vol. 421, núm. 1, pp. 16–23.

Bon, R. (1986): "Comparative Stability Analysis of Demand-Side and Supply-side Input-Output Models". *International Journal of Forecasting*. *Vol.* 2, pp. 231–235.

Dietzenbacher, E. (1997): "In Vindication of the Ghosh Model: a Reinterpretation as a Price Model". *Journal of Regional Science*. *Vol.* 37, pp. 629–651.

Eurostat (2008): *Updating and Projection Input-Output Tables*. Office for Official Publications of the European Communities, Luxemburg.

Ghosh, A. (1958): "Input-Output Approach in an Allocation System". *Economica*. Vol. 25, pp. 58–64.

Guerra, A. I.; Sancho, F. (2011): "Revisiting the Original Ghosh Model: can it be Made more Plausible?" *Economic Systems Research*. Vol. 23, núm. 3, pp. 319–328.

Guo, J.; Lawson, A. M.; Planting, M. A. (2002): From Make-Use to Symmetric I-O Tables: An Assessment of Alternative Technology Assumptions. *14th International Input-Output Conference*, Montreal.

Konijn, P. (1994): The Make and Use of Commodities by Industries: on the Compilation of Input-Output Data from the National Accounts. Enschede. Faculty of Public Administration and Public Policy, University of Twente.

Kop Jansen, P.; ten Raa, T. (1990): "The Choice of Model in the Construction of Input-Output Coefficients Matrices". *International Economic Review*. Vol. 31, pp. 213–227.

Luppino, M.; Gajewski, G.; Zohir, S.; Khondker, B.; Crowther, D. (2004) Estimating the Impacts of the Jamuna Bridge on Poverty Levels in Bangldesh using SAM and CGE Models: A Comparative Study. *EcoMod Input-Output and General Equilibrium: Data, Modeling and Policy Analysis Conference*. Bruxelas.

Mattey, J. P.; ten Raa, T. (1997): "Primary Versus Secondary Production Techniques in US Manufacturing". *Review of Income and Wealth*. Vol. 43, pp. 449–464.

Miller, R. (1989): "Stability of Supply Coefficients and Consistency of Supply-Driven and Demand-Driven Input-Output Models: a Comment". *Environment and Planning A*. Vol. 21, pp. 1113–1120.

Moore, E. H. (1920): On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix (Abstract). *Bulletin of the American Mathematical Society*. pp. 394–395.

Olsen, A. (2000): General Perfect Aggregation of Industries in Input-Output Models. *Economic Modelling*. Working Paper Series, núm. 2.

Oosterhaven, J. (1988): "On the Plausibility of the Supply-Driven Input-Output Model". *Journal of Regional Science*. Vol. 28, pp. 203–217.

Oosterhaven, J. (1989): "The Supply-Driven Input-Output Model: A New Interpretation but Still Implausible". *Journal of Regional Science*. Vol. 29, pp. 459–465.

Oosterhaven, J. (1996): "Leontief versus Ghoshian Price and Quantity Models". *Southern Economic Journal*. Vol. 62, núm. 3, pp. 750–759.

Penrose, R. (1955): "A Generalized Inverse for Matrices". *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Vol. 51, pp. 406–413.

Pereira, X. (2006): *Elaboración e Análise de Modelos Económicos baseados no Marco Input-Output*. Servizo de Publicacións e Intercambio Científico. Santiago de Compostela.

Pereira, X.; Carrascal, A.; Fernández, M. (2011): Impacto Económico do Turismo Receptor através de Modelos Origem-Destino: uma Aplicaçao para a Galiza, in Haddad, E.; Ramos, P.; Castro, E. [ed.]: *Modelos Operacionais de Economia Regional.* pp. 101–121. Principia Editora. Parede, Portugal.

Pereira, X.; Quiñoá; X, L.; Fernández, M. (2011) "Actualización Global de Tablas Origen-Destino: una Alternativa al Método Euro". *Análise Económica,* 42. Santiago de Compostela http://ideas.repec.org/p/edg/anecon/0042.html

Rainer, N. (1989): "Descriptive Versus Analytical Make-Use Systems: Some Austrian Experiences", in Miller, R.; Polenske, K.; Rose, A. [ed.]: *Frontiers of Input-Output Analysis*, Oxford University Press, New York.

Rose, A.; Allison, T. (1989): "On the Plausibility of the Supply-Driven Input-Output Model: Empirical Evidence on Joint Stability". *Journal of Regional Science*. Vol. 29, pp. 451–458.

Rueda-Cantuche, J.M. (2011): “Econometric Analysis of European Carbon Dioxide Emissions based on Rectangular Supply-Use Tables”. *Economic Systems Research*. Vol. 23, núm. 3, pp. 261–280.

Schinnar, A. (1978): “The Leontief Dynamic Generalized Inverse”. *The Quarterly Journal of Economics*. Vol. 92, núm. 4, pp. 641–52.

Stahmer, C. (1985): “Transformation Matrices in Input-Output Compilation” in Smyshlyaev, A. [ed.]: *Input-Output Modelling*. pp. 225–236. New York, Springer.

Steenge, A. (1990): “The Commodity Technology Revisited: Theoretical Basis and an Application to Error Location in the Make-Use Framework”. *Economic Modelling*. Vol. 7, núm. 4, pp. 376–387.

ten Raa, T.; Rueda-Cantuche, J.M. (2005): “Análisis de las Producciones Secundarias en la Economía Andaluza”. *Revista de Estudios Regionales*. Vol. 73, pp. 43–77.

United Nations (1999): *Handbook of Input-Output Table Compilation and Analysis, Studies in Methods*, Series F, núm. 74.

Viet, V. (1994): “Practices in Input-Output Table Compilation”. *Regional Science and Urban Economics*. Vol. 24, pp. 27–54.

Young, P. (1986): “The US Input-Output Experience-Present Status and Future Prospects” in Franz, A.; Rainer, N. [ed.]: *Problems of Compilation of Input-Output Tables*. pp. 121–145. Orac. Viena.

Zhao, J. (2002): The Techniques of Compiling the Rectangular UV Input-Output Table under the Hypothesis of Product Technology. *14th International Input-Output Conference*. Montreal

DOCUMENTOS DE TRABALLO XA PUBLICADOS.

ÁREA DE ANÁLISE ECONÓMICA

45. CONSUMPTION, SAVING, INVESTMENT, AND UNEMPLOYMENT. SVAR TESTS OF THE EFFECTS OF CHANGES IN THE CONSUMPTION-SAVING PATTERN **(Roberto Bande Ramudo, Manuel Fernández Grela e Mª Dolores Riveiro García)**
46. LOS DETERMINANTES DE LA INMIGRACIÓN IRREGULAR EN ESPAÑA **(Paula Elena Fernández Paez)**
47. EFFECTS OF TOURISM DEVELOPMENT ON TEMPORALITY **(Yolanda Pena Boquete, Diana Pérez Dacal)**
48. THE GREAT DEPRESSION IN SPAIN **(Eduardo L. Giménez, María Montero)**

ÁREA DE ECONOMÍA APLICADA

20. A CALIDADE DE VIDA COMO FACTOR DE DESENVOLVEMENTO RURAL. UNHA APLICACIÓN Á COMARCA DO EUME. **(Gonzalo Rodríguez Rodríguez.)**
21. CARACTERIZACIÓN SOCIOECONÓMICA Y DESARROLLO DEL TURISMO EN LA "COSTA DA MORTE". **(Begoña Besteiro Rodríguez)**
22. OS SERVIZOS A EMPRESAS INTENSIVOS EN COÑECEMENTO NAS REXIÓNS PERIFÉRICAS: CRECEMENTO NUN CONTEXTO DE DEPENDENCIA EXTERNA? **(Manuel González López)**
23. O PAPEL DA EMPRESA PÚBLICA NA INNOVACIÓN: UNHA APROXIMACIÓN Á EXPERIENCIA ESPAÑOLA **(Carmela Sánchez Carreira)**

ÁREA DE HISTORIA

14. AS ESTATÍSTICAS PARA O ESTUDIO DA AGRICULTURA GALEGA NO PRIMEIRO TERCIO DO SÉCULO XX. ANÁLISE CRÍTICA**. (David Soto Fernández)**
15. INNOVACIÓN TECNOLÓXICA NA AGRICULTURA GALEGA **(Antom Santos - Pablo Jacobo Durán García - Antonio Miguez Macho)**
16. EL BACALAO EN TERRANOVA Y SU REFLEXIÓN DE LAS ZEE **(Rosa García-Orellán)**
17. LA ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO EN LA GALICIA COSTERA: UNA REVISIÓN DEL IMPACTO DE LA INDUSTRIALIZACIÓN CONSERVERA EN ILLA DE AROUSA, 1889-1935 **(Daniel Vázquez Saavedra)**

ÁREA DE XEOGRAFÍA

22. A SITUACIÓN DA INDUSTRIA DA TRANSFORMACIÓN DA MADEIRA E A SÚA RELACIÓN CO SECTOR FORESTAL EN GALIZA ANTE A CHEGADA DO SÉCULO XXI **(Ángel Miramontes Carballada)**
23. LA CIUDAD Y SU IMAGEN TURÍSTICA EL CASO DE SANTIAGO DE COMPOSTELA EN EL MERCADO ITALIANO (**Lucrezia Lopez)**
24. EL DESARROLLO ECONÓMICO DE SANTA COMBA DE XALLAS. BASES PARA LA ELABORACIÓN DE UN PLAN ESTRATÉGICO MUNICIPAL (PEDEM) **José Balsa Barreiro**
25. LA MOVILIDAD FEMENINA EN ÁREAS RURALES. UN ESTUDIO CUALITATIVO EN LA COMARCA DEL DEZA (GALICIA) **Xiana Rodil Fernández, José Antonio Aldrey Vázquez, Miguel Pazos Otón**

XORNADAS DO IDEGA

5. RESIDUOS SÓLIDOS URBANOS: A SUA PROBLEMÁTICA E A SÚA GESTIÓN **(Marcos Lodeiro Pose, Rosa María Verdugo Matês)**
6. CINEMA E INMIGRACIÓN **(Cineclube Compostela, Rosa Maria Verdugo Matés e Rubén C. Lois González)**
7. NOVAS TECNOLOXÍAS E ECONOMÍA CULTURAL. II Xornadas SINDUR **(Carlos Ferrás Sexto)**
8. MODELOS DE APOYO AL ASOCIACIONISMO Y LA INNOVACIÓN EN LA GESTIÓN DE LA PEQUEÑA PROPIEDAD FORESTAL EN EL NOROESTE DE LA PENÍNSULA IBÉRICA. **(Manuel Fco. Marey Pérez)**

GEOGRAPHY YOUNG SCHOLARS BOOK

1. NEW TRENDS IN THE RENEWAL OF THE CITY **(María José Piñeira e Niamh Moore).**

Normas para os autores:

1. Os autores enviarán o seus traballos, por correo electrónico á dirección (idegadt@usc.es) en formato PDF ou WORD. O IDEGA poderá solicitar o documento en papel se o estima conveniente.
2. Cada texto deberá ir precedido dunha páxina que conteña o título do traballo e o nome do autor(es), as súas filiacións, dirección, números de teléfono e fax e correo electrónico. Así mesmo farase constar o autor de contacto no caso de varios autores. Os agradecementos e mencións a axudas financeiras incluiranse nesta páxina. En páxina á parte incluirase un breve resumo do traballo na lingua na que estea escrito o traballo e outro en inglés dun máximo de 200 palabras, así como as palabras clave e a clasificación JEL.
3. A lista de referencias bibliográficas debe incluír soamente publicacións citadas no texto. As referencias irán ó final do artigo baixo o epígrafe Bibliografía ordenadas alfabeticamente por autores e de acordo coa seguinte orde: Apelido, inicial do Nome, Ano de Publicación entre parénteses e distinguindo a, b, c, en caso de máis dunha obra do mesmo autor no mesmo ano, Título do Artigo (entre aspas) ou Libro (cursiva), Nome da Revista (cursiva) en caso de artigo de revista, Lugar de Publicación en caso de libro, Editorial en caso de libro, Número da Revista e Páxinas.
4. As notas irán numeradas correlativamente incluíndose o seu contido a pé de páxina e a espazo sinxelo.
5. As referencias bibliográficas deberán facerse citando unicamente o apelido do autor(es) e entre parénteses o ano.
6. Os cadros, gráficos, etc. irán insertados no texto e numerados correlativamente incluíndo o seu título e fontes.
7. O IDEGA confirmará por correo electrónico ó autor de contacto a recepción de orixinais.
8. Para calquera consulta ou aclaración sobre a situación dos orixinais os autores poden dirixirse ó correo electrónico do punto 1.
9. No caso de publicar unha versión posterior do traballo nalgunha revista científica, os autores comprométense a citar ben na bibliografía, ben na nota de agradecementos, que unha versión anterior se publicou como documento de traballo do IDEGA.